JOURNAL OF INTELLECTUAL PROPERTY AND HUMAN RIGHTS

Volume: 3 Issue:4 | April –2024 ISSN: 2720-6882
http://journals.academiczone.net/index.php/jiphr

МОДЕЛИРОВАНИЕ ОБЛАЧНЫХ СКОПЛЕНИЙ МИКРОЧАСТИЦ В ПОЛЕ ДВОЙНЫХ ЗВЕЗДНЫХ СИСТЕМ

Мырзаев Р.С., Турешбаев А.Т., Лесхан М.Б.

Аннотация. Рассматривается динамика облачных скоплений частиц газопылевых образований в в космическом пространстве. При этом особый интерес имеет изучение динамики скоплений микрометеоритных частиц и частиц газопылевых образований в поле звездных систем. С математической точки зрения адекватной динамической моделью может быть применена ограниченная задача трех тел с учетом светового давления на частицу со стороны звезд. В случае устойчивости точек либрации, в их окрестности ожидаются реальные скопления микрочастиц, образующих гигантские газопылевые облака межзвездной среды.

В плоскости параметров системы (коэффициентов редукции звездной пары) построены области устойчивых скоплений частиц в орбитальной плоскости с учетом нелинейных членов в дифференциальных уравнениях возмущенного движения. Также проведено нелинейное исследование устойчивости газопылевых образований в конфигурационном пространстве. Оказалось, что при отсутсвии множества точек, отвечающих резонансам 3-го и 4-го порядков, в области линейной устойчивости всюду имеет место устойчивость для большинства начальных условий и формальная устойчивость. Установлено, что для некоторых значений массового параметра звездной пары имеет место устойчивость в четвертом порядке.

1. Введение. Работа посвящена исследованию межзвездной среды двойных звезд, которые составляют более половины звезд вселенной. Особый интерес имеет изучение динамики скоплений частиц газопылевых образований, где частицы могут испытывать не только гравитационные силы, но и целый ряд других сил (магнитных, электрических, репульсивных сил светового давления и т.д.). При этом сила светового давления всегда расположена на одной линии с гравитационной силой, которая может быть не только соизмеримой с гравитационной силой, а иногда значительно превосходить ее по величине. Следовательно, отталкивающий эффект светового давления следует учитывать при изучении динамики спутников-баллонов и космических кораблей–парусников. Поэтому, в реальных условиях на гравитационное поле всегда накладывается репульсивная сила светового давления, создавая так называемое фотогравитационное поле. Следовательно при изучении математической модели динамики и эволюции микрометеоритных частиц учет эффекта светового давления является обязательным условием.

Особое значение для небесной механики имеют работы Радзиевского В.В. по фотогравитационной задаче трех тел с одной излучающей массой [1,2]. Позже Черников Ю.А. [3] исследовал устойчивость коллинеарных и треугольных точек с одной излучающей массой. Впервые были доказаны существование области устойчивости внутренных коллинеарных точек либрации фотогравитационной задачи трех тел с двумя излучающими массами Куницыным А.Л. и Турешбаевым А.Т [4,5].

Volume: 3 Issue:4 | April –2024 ISSN: 2720-6882
http://journals.academiczone.net/index.php/jiphr

В работе Пережогина А.А. и Турешбаева А.Т. [6] впервые проводится нелинейный анализ устойчивости треугольных точек либрации [ТТЛ] для некоторых фиксированных значений массового параметра.

2. Дифференциальные уравнения задачи и разложение функции Гамильтона.

Поскольку как гравитационная, так и репульсивная сила имеют одинаковую функциональную структуру, то их можно заменить одной силой, отличающейся от гравитационной некоторым постоянным коэффициентом Q, представляющим отношение разности этих сил к гравитационной силе и называемым коэффициентом редукции массы источника излучения (звезды). Физически допустимые значения коэффициента редукции определяются неравенствами $-\infty < Q \leq 1$. Здесь коэффициент редукции имеет следующее выражение [3,7]

$$Q = [1 - C\sigma/(f M)], \qquad \sigma = \varepsilon s/m.$$

При $Q = 1$ световое давление отсутствует, если $0 < Q < 1$ оно ослабляет гравитацию, а при $Q < 0$ световое давление превосходит гравитацию. Здесь C–мощность излучения тела массой M, f – всемирная гравитационная постоянная, m и s - масса и площадь поперечного сечения частицы, ε - коэффициент отражения. Движение частицы $P(x, y, z)$ пренебреженно малой массы будем изучать в поле двух гравитирующих и одновременно излучающих тел S_1 и S_2, считаемых материальными точками, и, обращающихся друг относительно друга по кеплеровой орбите. Тогда движение частицы задается каноническими уравнениями вида

$$\frac{d\bar{q}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \bar{p}_i}, \qquad \frac{d\bar{p}_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial \bar{q}_i}, \qquad (i = 1, 2, 3) \qquad (1)$$

где $\bar{q}_i$ суть декартовые координаты частицы $P(x, y, z)$, $\bar{p}_i$ - соответствующие канонические импульсы, а $H(x, y, z, \bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3)$ - аналитическая функция Гамильтона относительно координат и импульсов, которая в нашем случае имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(\bar{p}_1^2 + \bar{p}_2^2 + \bar{p}_3^2) + (\bar{p}_1 y - \bar{p}_2 x) - Q_1(1-\mu)/R_1 - Q_2\mu/R_2,$$
$$R_\alpha = \sqrt{(x - x_\alpha)^2 + y^2 + z^2}, \qquad (\alpha = 1, 2) \qquad (2)$$

Volume: 3 Issue:4 | April –2024 ISSN: 2720-6882
http://journals.academiczone.net/index.php/jiphr

Здесь Q_1 и Q_2 - коэффициенты редукции масс основных тел, которые для ТТЛ могут принимать только положительные значения [6].

В уравнения (1) вводим возмущения по формулам

$$x = x_*^* + q_1, \quad y = y_*^* + q_2, \quad \bar{p}_1 = \bar{p}_1^* + p_1, \; \bar{p}_2 = \bar{p}_2^* + p_2,$$
$$q_3 = p_3 = z_0^* = \bar{p}_3^* = 0, \tag{3}$$

где $x^* = 0{,}5(Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3} - 1) - \mu, \qquad y^* = \pm 0{,}5\sqrt{2(Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}) - (Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3}) - 1},$

$$\bar{p}_1^* = \mp 0{,}5\sqrt{2(Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}) - (Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3}) - 1},$$
$$\bar{p}_2^* = 0{,}5(Q_2^{2/3} - Q_2^{2/3} + 1) - \mu, \tag{4}$$

и раскладывая гамильтониан в ряд по степеням возмущений q_i и p_i в окрестности рассматриваемой точки, принимаемой за начало координат, получим

$$H = H_2 + H_3 + H_4 + \ldots \tag{5}$$

Здесь H_m - однородные полиномы степени m $(m = 2,3,4,\ldots)$ относительно обобщенных координат q_i и импульсов p_i, так что

$$H_m = \sum_{\nu + l = m} h_{\nu_1 \nu_2 l_1 l_2} \cdot q_1^{\nu_1} q_2^{\nu_2} p_1^{l_1} p_2^{l_2} \tag{6}$$

В выражении (5) формы H_2, H_3 и H_4 с учетом (3) и (4) примут следующий вид:

Volume: 3 Issue:4 | April –2024 ISSN: 2720-6882
http://journals.academiczone.net/index.php/jiphr

$$H_2 = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2\right) + p_1 q_2 - p_2 q_1 + h_{200} q_1^2 + h_{020} q_2^2 + h_{110} q_1 q_2, \quad (7)$$

$$H_3 = h_{300} q_1^3 + h_{030} q_2^3 + h_{210} q_1^2 q_2 + h_{120} q_1 q_2^2. \quad (8)$$

$$H_4 = h_{400} q_1^4 + h_{040} q_2^4 + h_{310} q_1^3 q_2 + h_{130} q_1 q_2^3 + h_{220} q_1^2 q_2^2. \quad (9)$$

где, $h_{20} = -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}(1-\mu)\frac{Q_{11}^2}{Q_1^{2/3}} + \frac{3}{4}\mu\frac{Q_{22}^2}{Q_2^{2/3}} - 1\right]$, $h_{11} = -\frac{3}{4}\sqrt{Q_{12}}\left[(1-\mu)\frac{Q_{11}}{Q_1^{2/3}} - \mu\frac{Q_{22}}{Q_{12}^{2/3}}\right]$,

$$h_{02} = -\frac{1}{2}\left[\frac{3}{4}(1-\mu)\frac{Q_{12}}{Q_1^{2/3}} + \frac{3}{4}\mu\frac{Q_{12}}{Q_2^{2/3}} - 1\right],$$

$$h_{30} = \frac{1}{16}\left[(1-\mu)(5Q_{11}^2 - 12Q_1^{2/3})\frac{Q_{11}}{Q_1^{4/3}} + \mu(5Q_{22}^2 - 12Q_2^{2/3})\frac{Q_{22}}{Q_2^{4/3}}\right]$$

$$h_{21} = -\frac{1}{2}\sqrt{Q_{12}}\left[(1-\mu)(Q_1^{2/3} - \frac{5}{4}Q_{11}^2)/Q_1^{4/3} + \mu(Q_2^{2/3} - \frac{5}{4}Q_{22}^2)/Q_2^{4/3}\right],$$

$$h_{12} = -\frac{5}{8}\left[(1-\mu)(0{,}8Q_1^{2/3} - Q_{12})\frac{Q_{11}}{Q_1^{4/3}} - \mu(0{,}8Q_2^{2/3} - Q_{12})\frac{Q_{22}}{Q_2^{4/3}}\right], \quad (10)$$

$$h_{03} = -\frac{5}{16}\sqrt{Q_{12}}\left[(1-\mu)(2{,}4Q_1^{2/3} - Q_{12})/Q_1^{4/3} + \mu(2{,}4Q_1^{2/3} - Q_{12})/Q_2^{4/3}\right],$$

$$h_{40} = -\frac{1}{8}\left[(1-\mu)(3Q_1^{4/3} - 7{,}5Q_1^{4/3}Q_{11}^2 + 35Q_{11}^4/16)/Q_1^2 + \right.$$
$$\left. + \mu(3Q_2^{4/3} - 7{,}5Q_2^{2/3}Q_{22}^2 + 35Q_{22}^4/16)/Q_2^2\right],$$

$$h_{31} = -\frac{5}{16}\sqrt{Q_{12}}\left[(1-\mu)Q_{11}(1{,}75Q_{11}^2 - 3Q_1^{2/3})/Q_1^2 + \mu Q_{22}(1{,}75Q_{22}^2 - 3Q_2^{2/3})/Q_2^2\right],$$

Volume: 3 Issue:4 | April –2024 ISSN: 2720-6882
http://journals.academiczone.net/index.php/jiphr

$$h_{22} = -\frac{5}{16}\Big[(1-\mu)(0{,}8Q_1^{4/3} - Q_1^{2/3}Q_{12} - Q_{11}^2(Q_1^{2/3} - 1{,}75Q_{12}))/Q_1^2 + \\ + \mu(0{,}8Q_2^{2/3} - Q_2^{2/3}Q_{12} - Q_{22}^2(Q_2^{2/3} - 1{,}75Q_{12}))/Q_2^2\Big],$$

$$h_{13} = -\frac{5}{16}\sqrt{Q_{12}}\Big[(1-\mu)Q_{11}(1{,}75Q_{12} - 3Q_1^{2/3})/Q_1^2 - \mu Q_{22}(1{,}75Q_{12} - 3Q_2^{2/3})/Q_2^2\Big],$$

$$h_{04} = -\frac{5}{32}\Big[(1-\mu)(2{,}4Q_1^{4/3} - 6Q_1^{2/3}Q_{12} + 1{,}75Q_{12}^2)/Q_1^2 + \\ + \mu(2{,}4Q_2^{4/3} - 6Q_2^{2/3}Q_{12} + 1{,}75Q_{12}^2)/Q_2^2\Big],$$

$$Q_{12} = 2(Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}) - (Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3})^2 - 1, \qquad Q_{11} = 1 + Q_1^{2/3} - Q_2^{2/3},$$
$$Q_{22} = 1 - Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}.$$

3. Исследование устойчивости ТТЛ в плоской задаче

В нашем случае H_2 не является знакоопределенной функцией, и следовательно, из устойчивости линейной системы не следует устойчивость полной систем

Полагая, что в системе отсутствуют резонансы 3-го и 4-го порядков, после применения преобразования Биркгофа и ограничиваясь разложением до четвертого порядка включительно, функцию Гамильтона можно записать в виде

$$H^* = \omega_1 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20} r_1^2 + c_{11} r_1 r_2 + c_{02} r_2^2, \qquad 2r_i = q_i^2 + p_i^2 \quad (i = 1,2) \tag{11}$$

Согласно теореме Арнольда-Мозера [8] при одновременном выполнении условий

$$k_1\omega_1 + k_2\omega_2 \neq 0, \tag{12}$$

$$C(\omega_1, \omega_2) = c_{20}\omega_2^2 + c_{11}\omega_1\omega_2 + c_{02}\omega_1^2 \neq 0, \tag{13}$$

Volume: 3 Issue:4 | April –2024 ISSN: 2720-6882
http://journals.academiczone.net/index.php/jiphr

где k_1, k_2 - целые числа, удовлетворяющие условию $0 < |k_1| + |k_2| \le 4$ ($k = |k_1| + |k_2|$ - порядок резонанса), а c_{ij} - коэффициенты нормальной формы, определяемые системой формул через коэффициенты исходного гамильтониана [6], для всех значений массового параметра μ из области устойчивости линейной системы всюду сохраняется устойчивость по Ляпунову исходной системы (1). Исключение составляют множества точек, отвечающие резонансам 3-го ($\omega_1 = 2\omega_2$) и 4-го ($\omega_1 = 3\omega_2$) порядков, которые определяются выражениями

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{\frac{225Q_{12}}{4Q_1^{2/3}\cdot Q_2^{2/3}} - 16}}{\frac{\sqrt{Q_{12}}}{2\sqrt[3]{Q_1}\cdot\sqrt[3]{Q_2}}}\right] \quad (14), \qquad \mu_2 = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{\sqrt{\frac{25Q_{12}}{4Q_1^{2/3}\cdot Q_2^{2/3}} - 1}}{\frac{5}{2}\frac{\sqrt{Q_{12}}}{\sqrt[3]{Q_1}\cdot\sqrt[3]{Q_2}}}\right]. \quad (15)$$

При резонансе $\omega_1 = 2\omega_2$ нормализованный гамильтониан примет вид

$$H = 2\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 + A(\omega_1, \omega_2) r_2 \sqrt{r_1}\sin(\varphi_1 + 2\varphi_2) + O((r_1 + r_2)^2), \quad (16)$$

где $A(\omega_1, \omega_2) = -\sqrt{\omega_2 (x_{1002}^2 + y_{1002}^2)}$.

В обобщенной фотогравитационной ограниченной плоской задаче трех тел выражение $A(\omega_1, \omega_2)$ имеет вид

$$A(\omega_1, \omega_2) = -\left[\omega_2 \frac{25}{64}\Big((1-\mu)(0{,}8\cdot Q_1^{2/3} - Q_{12})Q_{11}/Q_1^{4/3} - \right.$$
$$\left. - \mu(0{,}8Q_2^{2/3} - Q_{12})Q_{22}/Q_2^{4/3}\Big)^2\right]^{1/2}, \quad (17)$$

Volume: 3 Issue:4 | April –2024 ISSN: 2720-6882
http://journals.academiczone.net/index.php/jiphr

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\left[1 - \sqrt{\frac{36\mu(1-\mu)\left[2(Q_1^{2/3} + Q_2^{2/3}) - (Q_{11}-1)^2 - 1\right]}{4Q_1^{2/3}\cdot Q_2^{2/3}}}\right]^{1/2},$$

которое при положительных значениях Q_1 и Q_2 нигде не обращается в нуль. Откуда следует [6,8], что в ограниченной фотогравитационной задаче трех тел в области устойчивости линейной системы ТТЛ всюду устойчивы по Ляпунову, за исключением множества точек, определяемого соотношением (12), для которых реализуется резонанс $\omega_1 = 2\omega_2$.

При наличии в системе резонанса четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$ с помощью преобразования Биркгофа в исходном гамильтониане уничтожим члены третьей степени. Нормализованный при этом гамильтониан в полярных координатах примет следующий вид:

$$H^* = 3\omega_2 r_1 - \omega_2 r_2 + c_{20}r_1^2 + c_{11}r_1 r_2 + c_{02}r_2^2 + B(\omega_1, \omega_2)r_2\sqrt{r_1 r_2}\cos(\varphi_1 + 3\varphi_2) + O(r_1 + r_2)^{5/2}$$

Здесь $B(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{3}\omega_2\sqrt{3(x_{1003}^2 + y_{1003}^2)}$.

Используя результаты А.П. Маркеева [8] получим, что при резонансе четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$, определяемом множеством точек из области устойчивости линейной системы, ТТЛ при

а) $|F_1| > F_2$ - устойчивы по Ляпунову, (18)

в) $|F_1| < F_2$ - неустойчивы, (19)

где $F_1 = c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}$, $F_2 = 3\sqrt{3}B(\omega_1, \omega_2)$.

Здесь коэффициенты c_{ij}, являющиеся инвариантами функции Гамильтона (5) относительно канонических преобразований, зависят от коэффициентов $h_{\nu_1\nu_2 l_1 l_2}$ однородных полиномов (6) степени m (m=3, 4), которые в фотогравитационной задаче являются функциями параметров

Volume: 3 Issue:4 | April –2024 ISSN: 2720-6882
http://journals.academiczone.net/index.php/jiphr

системы - коэффициентов редукции Q_1, Q_2 (или координат *x, y*) и безразмерного массового параметра μ. Вследствие громоздкости выражений этих коэффициентов, полученных в результате нормализации, исследования проводились на компьютере при помощи специально разработанной программы.

Доказано, что для всевозможных значений параметров системы резонансные множества точек 3-го порядка в обобщенной фотогравитационной ограниченной задаче трех тел всегда неустойчивы.

Построены области устойчивости ТТЛ при $\omega_1 = 2\omega_2$ и $\omega_1 = 3\omega_2$ для произвольных значений массового параметра μ в конфигурационном пространстве и в пространстве параметров системы (рис. 1,2). Были найдены участки области, где выполняется неравенство $\left|c_{20} + 3c_{11} + 9c_{02}\right| > 3\sqrt{3}B(\omega_1, \omega_2)$, что свидетельствует об устойчивости по Ляпунову исследуемых точек либрации в плоском варианте задачи (в случае пространственной задачи имеет место устойчивость в 4-ом порядке); на других участках области, где неравенство меняет знак на обратный, имеет место неустойчивость исследуемых точек. Также указаны области (рис.2), в которых условие (13) не выполняется.

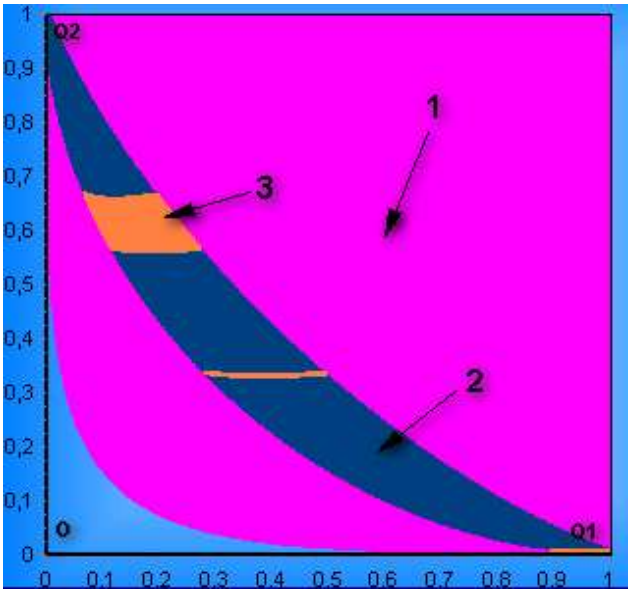


Рис.1. Область устойчивости ТТЛ при μ=0,01. 1 - область линейной устойчивости при $\omega_1 = 3\omega_2$;
3 – неустойчивые точки;

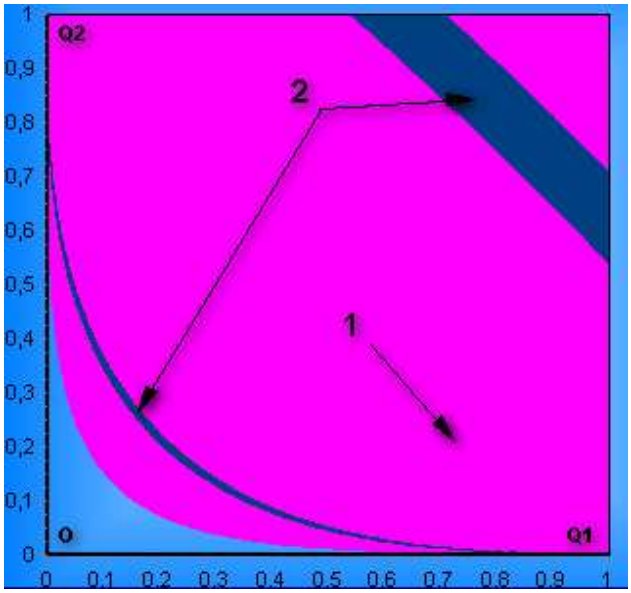


Рис. 2. Область устойчивости ТТЛ при μ=0,01. 1 - область линейной устойчивости;
2 - точки, где $C(\omega_1, \omega_2) = 0$.

Volume: 3 Issue:4 | April –2024 ISSN: 2720-6882
http://journals.academiczone.net/index.php/jiphr

Таким образом, на основе КАМ-теории и результатов А.Л.Маркеева было доказано, что в области устойчивости в первом приближении ТТЛ плоской задачи трех тел всюду устойчивы по Ляпунову, за исключением множества точек, в которых реализуются резонансы третьего порядка $\omega_1 = 2\omega_2$. При резонансе четвертого порядка $\omega_1 = 3\omega_2$ ТТЛ могут быть устойчивы по Ляпунову или неустойчивы, в зависимости от выполнения условий теоремы А.П. Маркеева. Численным исследованием было установлено, что в области устойчивости в первом приближении для всех значений массового параметра из интервалов $0{,}0079625269\ldots > \mu > 0$ и $0{,}5 > \mu > 0{,}3860630212\ldots$ условия теоремы Арнольда – Мозера всегда выполняются, следовательно для этих значений μ ТТЛ всюду имеет устойчивы по Ляпунову. Таким образом, вопрос об устойчивости ТТЛ в плоской фотогравитационной круговой ограниченной задаче трех тел решается до конца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

адзиевский В.В. Ограниченная задача трех тел с учетом светового давления. //Астрономический журнал. 1950. Т.27. С. 249-256.

2. Радзиевский В.В. Пространственный случай ограниченной задачи трех излучающих и гравитирующих тел. // Астрономический журнал. 1953. Т.30. С. 265-272

ерников Ю.А. Фотогравитационная ограниченная задача трех тел. //Астрономический журнал. 1970. Т.47. 1. С. 217-223.

Куницын А.Л., Турешбаев А.Т. О коллинеарных точках либрации фотогравитационной задачи трех тел. // Письма в Астрон. журнал. 1983. Т. 9. 7. С. 432-435.

5. Kunitsin A.L., and Tureshbaev A.T. (1985) On the collinear libration in the photo-gravitational three-body problem. *Celest. Mech.,* 35, 2, 105-112.

ережогин А.А., Турешбаев А.Т. Об устойчивости треугольных точек либрации в фотогравитационной задаче трёх тел // Астрон. журнал. 1989. Т.66. С.859-865.

7. Kumar, V. and Choudhry, R. K. (1989) *Indian J. pure appl. Math.*, 20(4): 403-422.

аркеев А.П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. М.: Наука, 1978. 312 с.